

ELM-253: Geometría No Euclidiana

Identificación

Asignatura:	Geometría No Euclidiana
Sigla:	ELM-253
Area Curricular:	Geometría y Topología
Modalidad:	Semestral
Nivel Semestral:	Quinto Semestre, Ciclo Intermedio
Horas Teóricas:	4 por semana en dos sesiones
Horas Prácticas:	2 por semana en una sesión
Pre-Requisitos Formales:	MAT-123
Carreras destinatarias:	Matemática y Area de Ciencia y Tecnología

Problema

El problema del axioma de las paralelas, o como lo expresó el matemático francés Jean Le Rond D'Alenbert, "el escándalo de la geometría", preocupa a los matemáticos de todos los períodos desde los tiempos griegos hasta 1800. La verdad que llegó a destruir la pretendida verdad fue vista claramente por el más grande de los matemáticos del siglo XIX, Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Primera observación: Consistió en percibir que el axioma de las paralelas es independiente de los otros nueve axiomas, es decir, que es lógicamente posible escoger axioma contradictorio al de las paralelas y usarlo en conjunción con los otros nueve axiomas de Euclides para deducir teoremas de una nueva geometría.

Segunda Observación: Consistía en que la geometría no euclídea podría ser usada para representar el espacio físico con tanto derecho como la geometría euclídea.

Las implicaciones de la geometría no euclídea son drásticas. Si ambas, geometría euclídea y no euclídea pueden representar el espacio físico igualmente bien, ¿en qué consiste la verdad acerca del espacio y de las figuras en el espacio?

Objeto de la Materia

En los Elementos, toda la geometría, reunión hasta entonces de reglas empíricas para medir o dividir figuras se convierte en ciencia deductiva. Se condensa toda ella en unos pocos postulados, de los cuales deriva el resto por sucesivos razonamientos lógicos. Lo que antes era empírico se convierte en obra del discurso y del pensamiento; la razón suple, como instrumento, a los sentidos.

Elevada la geometría a este nivel, quedaba automáticamente al descubierto la posibilidad de muchas variantes; bastaba sustituir los postulados de partida por otros, para tener nuevas geometrías. Fueron las denominadas, más tarde, geometrías no euclidianas, pero cuya existencia estaba implícita en la misma obra de Euclides.

Más propiamente, por costumbre se ha reservado el nombre de geometrías no euclidianas para las que conservan todos los postulados de Euclides menos uno de ellos, el denominado postulado de las paralelas. En tal sentido, el objeto no va a ser edificar toda la geometría a partir de los nuevos postulados, sino, tomar la cuestión desde un punto de vista superior, aunque distinto del histórico, exponer con detalle dichas geometrías tal como aparecen encuadradas en el marco de la geometría proyectiva, es decir, siguiendo el modelo dado para las mismas por Félix Klein.

Objetivos generales

Dejando de lado el desarrollo histórico, así como la difícil tarea de distinguir a quién pertenece cada una de las ideas que forman la geometría no euclidiana, tenemos los siguientes objetivos:

1. Resumir la solución de Lobachevski al problema del Quinto Postulado en el sentido de que tal postulado no puede ser probado.
2. Identificar que añadiendo a las proposiciones básicas de la geometría el axioma opuesto se puede desarrollar una geometría extensa y lógicamente perfecta.
3. Establecer que la verdad de los resultados de cualquier geometría lógicamente concebible y en lo que atañe a sus aplicaciones el espacio real, sólo se puede verificar empíricamente.
4. Valorar que una geometría lógica concebible debe ser desarrollada no sólo como un esquema lógico arbitrario, sino como una teoría que abra nuevos caminos y métodos para las teorías físicas.

Programa Sintético

Introducción. Axiomas de la Geometría Elemental. Teoría no Euclidiana de las Paralelas. Análisis de los Axiomas de la Geometría Elemental. Geometría de Riemann.

Contenido Analítico

1. *Introducción:* 1.1 Consideraciones generales. 1.2 Breve reseña de las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría. 1.3 Axiomas de Euclides. 1.4 El quinto postulado 1.5 N. I. Lobachevski y su geometría 1.6 Formación del concepto de espacio geométrico 1.7 Problemas de aplicación
2. *Axiomas de la Geometría Elemental:* 2.1 Introducción. 2.2 Elementos geométricos. 2.3 Axiomas de incidencia. 2.4 Axiomas de orden. 2.5 Consecuencias de los axiomas de incidencia y de orden. 2.6 Axiomas de congruencia. 2.7 Consecuencias de los axiomas incidencia, de orden y de congruencia. 2.8 Axiomas de continuidad. 2.9 Axiomas de paralelismo. 2.10 Problemas de aplicación.
3. *Teoría no Euclidiana de las Paralelas:* 3.1 Introducción. 3.2 Definición de paralelas según Lobachevski. 3.3 Rectas paralelas y rectas divergentes. 3.4 La función de Lobachevski $\pi(x)$. 3.5 Rectas y planos en el espacio de Lobachevski. 3.6 Equidistante y oriciclo. 3.7 Superficie equidistante y oriesfera. 3.8 Geometría elemental sobre las superficies del espacio de Lobachevski. 3.9 Area de un triángulo. 3.10 Demostración de la consistencia lógica de la geometría de Lobachevski. 3.11 Relaciones métricas fundamentales de la Geometría de Lobachevski. 3.12 Problemas de aplicación.
4. *Análisis de los Axiomas de la Geometría Elemental:* 4.1 Introducción. 4.2 Los tres problemas básicos de la axiomática. 4.3 Consistencia de los axiomas de la geometría euclidiana. 4.4 Demostración de la independencia de algunos axiomas de la geometría euclidiana. 4.5 Axiomas de completitud. 4.6 Completitud del sistema de axiomas de la geometría euclidiana. 4.7 Método axiomático en Matemática. 4.8 Problemas de aplicación.
5. *Geometría de Riemann:* 5.1 Introducción. 5.2 Diferencias entre las geometrías de Euclides, de Lobachevskiy de Riemann. 5.3 Elementos de la Geometría de Riemann. 5.4 Axiomas de la Geometría de Riemann. 5.5 Proposiciones de la Geometría de Riemann. 5.6 Plano riemanniano. 5.7 Problemas de aplicación.

Modalidad de Evaluación

Modalidad de la evaluación: Cualitativa y Cuantitativa

Examen	Temas	Ponderación
Primer Parcial	Capítulo(s) 1 y 2	10 %
Segundo Parcial	Capítulo(s) 3	10 %
Tercer Parcial	Capítulo(s) 4	10 %
Cuarto Parcial	Capítulo(s) 5	10 %
Examen Final	Todos los Capítulos	20 %
Trabajo Final	Todos	20 %
Prácticas	Todos	20 %
Recuperatorio	Algún examen parcial	El mismo
		100 %

Se puede recuperar cualquier examen parcial, pero no el examen final. La nota del examen de recuperación reemplaza al puntaje anterior.

Métodos y Medios

Estrategias de Aprendizaje Problémico: Dialogada, Heurística, Programada, demostrativa, Algorítmica, Investigativa.

Medios: Material impreso, Modelos, Carteles, Acetato, Guía de trabajo, Glosario de términos.

Bibliografía

- [1] Efimov Nicolai V., (1984), *Geometría Superior*, Ed. MIR, Moscú, URSS.
- [2] Eves Howard, (1964), *Estudio de la Geometría I y II*, Ed. UTEMA, México.
- [3] Smogorzlierski A.S., (1984), *Acerca de la Geometría de Lobachevski*, Ed. MIR, Moscú, URSS.
- [4] Santaló Luis A., (1961), *Geometrías no Euclidianas*, Ed. EUDEBA, Bs. Aires, Argentina.